TRATAMIENTO DE LOS NERVIOS CURVOS EN LAMINAS SUSTENTADAS POR RESBALAMIENTO PURO

ING. JUAN SNITCOFSKY

RESUMEN

Se expone un procedimiento aplicable a algunas estructuras laminares de hormigón armado, que permite atenuar el efecto perturbador del peso propio de los nervios de borde. Mediante una selección precisa de las formas y dimensiones de los miembros de una lámina sustentada por resbalamiento puro, es posible mejorar el comportamiento de la estructura, aproximándolo al estado membranal. Se obtiene a la vez una apreciable reducción en la tarea del análisis estructural.

INTRODUCCION

El diseño y cálculo de una estructura laminar de hormigón armado implica invariablemente un detenido estudio de sus nervios de borde. Para que una lámina curva se aproxime razonablemente al estado membranal, es preciso, entre otras condiciones, que las fuerzas provenientes de los vínculos que la soportan actúen sólo en el plano tangente a su superficie media.

En general, el peso propio de los nervios de borde constituye una transgresión al mencionado requisito, y en consecuencia, habrán de generarse en la membrana esfuerzos debidos a la presencia de momentos flectores. La importancia de estos esfuerzos, así como el margen dentro del cual pueden amortiguarse, dependen naturalmente de las medidas que se adopten para contrarrestar ese efecto. Algunas de estas medidas —las más usuales— se enumeran a continuación:

—Apoyar los nervios de borde sobre miembros que equilibren su peso, como muros portantes, columnas, elementos provenientes del aventanamiento, etc.

Fig. 1.— Cubierta constituida por láminas postensadas en paraboloide hiperbólico. El nervio de borde tiene 40 metros de luz con una altura de 0,42 m. Planta Schcolnik, Partido de Morón. Ings. Justo Segura Godoy y Juan Snitcofsky.

—Cuando se trate de nervios comunes a dos láminas contiguas, es posible a veces equilibrar la carga muerta con los esfuerzos de borde de ambas membranas.

—Se puede confiar al mismo nervio la función de soportarse a sí mismo, siempre que las deformaciones que experimente estén suficientemente limitadas como para despreciar su efecto sobre la lámina. En este caso, el pretensado puede aportar soluciones de gran efectividad, no sólo facilitando la reducción de los pesos, sino —principalmente— al permitir recobrar las deformaciones. (Fig. 1).

—Es posible recurrir a la colaboración parcial o total de la misma membrana, para soportar el peso de los nervios. El análisis respectivo deberá hacerse a la luz de la teoría flexional, toda vez que ello sea viable, dada la complejidad de las expresiones matemáticas que pueden presentarse. En todo caso, el ensayo sobre modelos a escala prestará un valioso auxilio, arrojando información cualitativa y cuantitativa de gran confiabilidad.

El criterio expuesto en este trabajo se propone señalar un recurso válido en algunos casos particulares, en los cuales se pueden equilibrar determinados esfuerzos de membrana con el peso propio de las nervaduras, aún cuando éstas no sean comunes a dos lóbulos adyacentes. Logrado este propósito, los nervios quedarán sometidos exclusivamente a esfuerzos axiles, no importa cual fuere su peso, y las perturbaciones originadas por las cargas permanentes podrán limitarse prácticamente a voluntad.

I) EXPRESIONES GENERALES.

En la Fig. 2 se ha representado un sector de la superficie de ecuación:

$$z = f(x, y)$$

referido a la terna ortogonal x-y-z, y limitado por el paralelogramo curvilíneo de vértices P-Q-R-S.

Se admite que la estructura se encuentra en régimen membranal, y que bajo la acción del sistema de cargas verticales Z se genera en la membrana un estado de tensiones de resbalamiento puro, es decir:

$$N_x = N_y = 0 ; \qquad N_{xy} = \text{constante}$$

estado de tensiones membranales toda vez que se cumpla

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} \neq 0$$

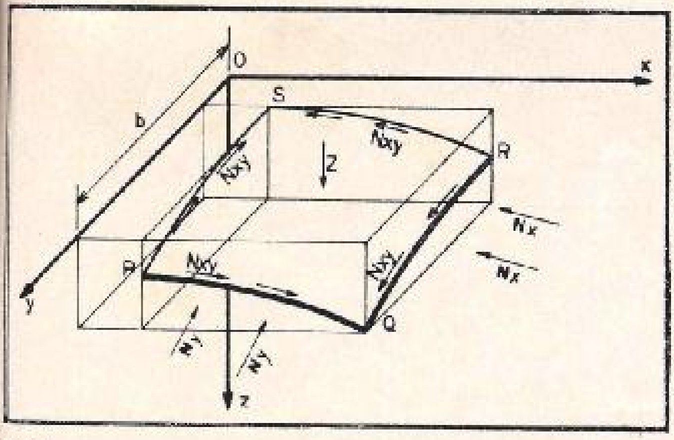

FIG. 2

para todo punto del recinto considerado, y siempre que las cargas verticales Z puedan variarse adecuadamente. (Espesor de lámina variable de punto a punto o procedimiento similar. *

En la Fig. 3 se ha representado un corte de la misma superficie anterior practicado a la distancia b del plano z-O-x y paralelo al mismo. La curva PQ será entonces la directriz del nervio de borde PQ y debe satisfacer la ecuación:

$$z = f\ (x,b) \qquad \text{(I-a)}$$

Este nervio PQ debe conducir hasta sus apoyos el esfuerzo N_{xy} proveniente de la membrana, y aplicado en forma uniforme a lo largo de su eje. Sobre el elemento de curva ds actuarán las fuerzas elementales:

$$N_{\bar{x}y}\ .\ dx\ ;\ N_{xy}\ .\ dz$$

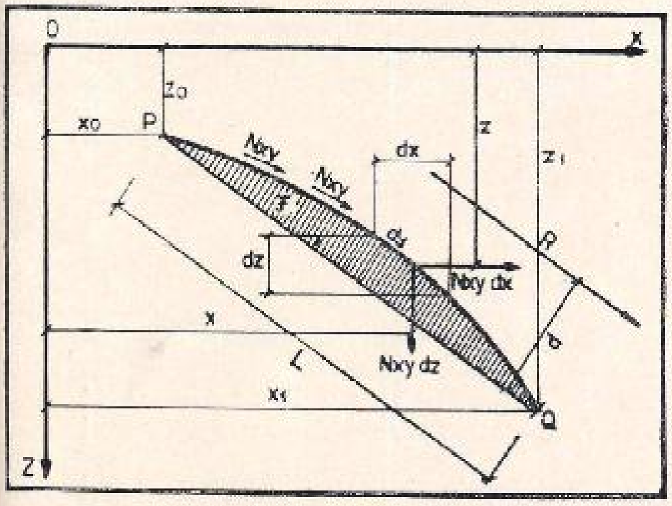

FIG. 3

horizontal y vertical, respectivamente. Tomando momentos respecto de Q resulta:

$$dM = N_{\bar{x}y}\ (z_1 - z)\ dx - N_{xy}\ (x_1 - x) dz \qquad \text{(I-b)}$$

Integrando esta expresión a lo largo del borde PQ se tendrá el aumento total M de las fuerzas N_{xy}:

$$M = N_{xy}\left[\ z_1\ (x_1 - x_0) - \int_{x_0}^{x_1} z.\ dx - x_1\ (z_1 - z_0) + \int_{z_0}^{z_1} x.\ dz\ \right]$$

La cantidad entre corchetes equivale al doble del área encerrada entre la curva PQ y su cuerda, como puede comprobarse si se analiza con ayuda de la fig. 3 el significado geométrico de cada uno de los sumandos que la componen. Llamando F a dicha área, rayada en la fig. 3, y reemplazando en la expresión anterior:

$$M = 2\ F\ N_{\bar{x}y} \qquad \text{(I-c)}$$

La resultante R de las fuerzas $N_{\bar{x}y}$ es paralela a la cuerda de longitud L y proporcional a ella, o sea:

$$R = L.\ N_{\bar{x}y} \qquad \text{(I-d)}$$

estando ubicada del lado convexo de la curva a una distancia d tal que:

$$d = \frac{M}{R} = \frac{2\ F\ N_{\bar{x}y}}{L.\ N_{\bar{x}y}} = \frac{2\ F}{L} \qquad \text{(I-e)}$$

II) APLICACION AL CASO DE UN BORDE DE DIRECTRIZ PARABOLICA.

La fig. 4 representa la directriz parabólica de una nervadura de borde perteneciente a una lámina sustentada por resbalamiento puro, por lo tanto: $N_{\bar{x}y}$ = constante.

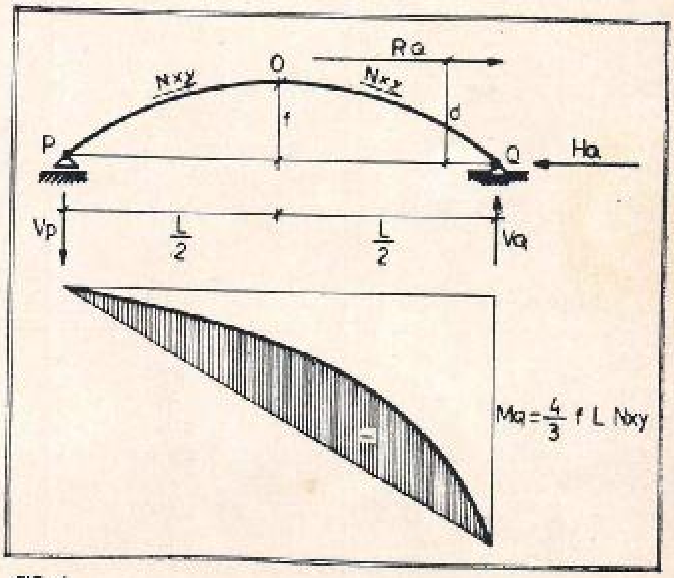

FIG. 4

El momento M_q de dichas fuerzas respecto de Q, según (I-c) será:

$$M_q = 2\ F\ N_{xy} = 2.\frac{2}{3} f.\ L.\ N_{\bar{x}y} = \frac{4}{3} f.\ L.\ N_{xy} \qquad \text{(II-a)}$$

Las reacciones de vínculo, supuesto el arco simplemente apoyado serán:

$$V_p = -V_q = \frac{M_q}{L} = \frac{4}{3}\ \frac{f.\ L.\ N_{\bar{x}y}}{L} = \frac{4}{3} f.\ N_{\bar{x}y} \qquad \text{(II-b)}$$

y la reacción horizontal en Q:

$$H_q = N_{\bar{x}y}.\ L \qquad \text{(II-c)}$$

La distancia d de la recta de acción de R_q al centro de momentos Q es, de acuerdo con (I - e):

$$d = \frac{2\ F}{L} = 2\ \frac{2}{3}\ \frac{f.\ L}{L} = \frac{4}{3} f \qquad \text{(II-d)}$$

(*) Revista CONSTRUCCIONES Nº 244. Nov. Dic. 1973, "Estructuras Membranales de Espesor no Uniforme".

En la misma Fig. 4 se ha representado (rayado) el diagrama de momentos flectores correspondiente. Se observa que, dado el signo negativo de los momentos, las fuerzas $N_{\bar{x}y}$ tienden a flexionar el nervio hacia arriba y en este hecho se basan las consideraciones que siguen.

III) Determinación de la carga antifunicular de los nervios de borde.

La observación del diagrama de momentos flectores representado en la Fig. 4, sugiere de inmediato la posibilidad de emplear la carga proveniente del peso propio del nervio de borde PQ para anular los momentos flectores a lo largo del mismo.

En rigor tiene más importancia para nosotros la propuesta inversa, o sea el empleo de las fuerzas distribuidas $N_{\bar{x}y}$ para equilibrar el peso propio del nervio de borde, de modo de suprimir las solicitaciones de flexión. De cualquier modo, llamando g al peso buscado, y definiéndolo como la carga por unidad de longitud de la proyección horizontal de la curva directriz, debe cumplirse, salvo signo:

$$g = \frac{d^2\ Mc}{dx^2} \qquad \text{(III-a)}$$

siendo Mc el momento flector generado en la pieza por N_{xy} en el punto genérico C, de coordenadas (x,z) - (Fig. 5).
Si descomponemos la resultante izquierda Rc de las fuerzas N_{xy}, en las direcciones horizontal y vertical, resulta, llamando Vp a la reacción en P:

$$Mc = - Vp\ (x\text{-}x_0) + N_{\bar{x}y}\ (x\text{-}x_0)\ d' \qquad \text{(III-b)}$$

El incremento de Mc al tomar como centro de momentos el punto C', distante ds de C y ubicado sobre el mismo arco, será:

$$dMc = Mc' - Mc \qquad \text{(III-c)}$$

$$Mc' = - Vp\ (x\text{-}x_0 + dx) - N_{\bar{x}y}\ (z\text{-}z_0)\ dx - N_{xy}\ (x\text{-}x_0)\ (d' + dz) \qquad \text{(III-d)}$$

Por lo tanto, restando (III-b) de (III-d) y operando:

$$dMc = Mc'\text{-}Mc = \text{-}Vp\ dx - N_{\bar{x}y}\ (z\text{-}z_0)\ dx + N_{xy}\ (x\text{-}x_0)dz \qquad \text{(III-e)}$$

Llamando $p = \dfrac{dz}{dx}$; $r = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{d^2z}{dx^2}$, de (III-e) se obtiene:

$$\frac{dMc}{dx} = - Vp - N_{\bar{x}y}\ (z\text{-}z_0) + N_{xy}\ (x\text{-}x_0)\ p \qquad \text{(III-f)}$$

y también:

$$\frac{d^2Mc}{dx^2} = g = - N_{\bar{x}y}\ .\ p + N_{\bar{x}y}\ .\ p + N_{xy}\ \ (x\text{-}x_0)r$$

o sea:

$$g = N_{\bar{x}y}\ (x\text{-}x_0)\ r \qquad \text{(III-g)}$$

obteniendo así la ley de variación del peso propio del nervio de borde que cumple la condición impuesta.
Aplicando estas relaciones al caso particular tratado en II)., y supuesto el origen de coordenadas en el punto O, (fig. 4):

$$x_0 = - \frac{L}{2} \ ; \qquad z = \frac{4f}{L^2}\ x^2$$

siendo las derivadas de z:

$$p = \frac{8f}{L^2}\ x \ ; \qquad r = \frac{8f}{L^2}$$

De acuerdo con la ecuación (III-g):

$$g = N_{\bar{x}y}\ (x + \frac{L}{2})\ \frac{8f}{L^2}$$

El peso unitario del nervio resulta función lineal de x, y su máximo valor se verifica para $x = \dfrac{L}{2}$, en consecuencia:

$$g\ max. = 8\ \frac{f}{L}\ N_{\bar{x}y}$$

El peso G del nervio PQ será:

$$G = g\ max.\ \frac{L}{2} = 4\ f.\ N_{\bar{x}y}$$

Esta carga exterior G origina en P una reacción Vp:

$$Vp = \frac{G}{3} = \frac{4}{3}\ f.\ N_{\bar{x}y}$$

Comparado este valor con el obtenido en (II-d), o sea con la reacción en P debida a la acción de N_{xy}, se concluye que en este caso la reacción izquierda se anula, y el único apoyo activo es el derecho. De modo que, si el nervio PQ estuviese empotrado en Q, el resultado sería el mismo que el hallado y el par de empotramiento sería nulo.

Con el mismo criterio pueden analizarse otros casos, no sólo variando las condiciones de apoyo, sino la dirección de $N_{\bar{x}y}$, o la curvatura del nervio, que puede presentar concavidad hacia arriba o hacia abajo. Del análisis del caso surgirá o no la conveniencia de adoptar un dispositivo como el descrito.

Debe considerarse asimismo, que tanto las fuerzas N_{xy} como las reacciones de vínculo se han supuesto actuando en el baricentro de las secciones. Si así no fuera las correspondientes excentricidades deben introducirse como nuevos parámetros, lo cual puede alterar sensiblemente el resultado obtenido.

IV) DETERMINACION DE LAS TENSIONES EN LAS NERVADURAS.

La acción simultánea del sistema de fuerzas de membrana $N_{\bar{x}y}$ y las cargas provenientes del peso g del nervio, como queda dicho, provocan una solicitación axil de tracción o compresión pura según el caso. Procederemos a determinar el valor de la tensión del nervio en cada punto. Para ello nos valdremos de las siguientes designaciones: (Fig. 5)

γ: peso específico del material considerado.

σ: tensión en el nervio bajo la acción de $N_{\bar{x}y}$ y g, en el punto C de abscisa x.
T: resultante de las fuerzas g y $N_{\bar{x}y}$ que actúan a la izquierda de C.
B: área de la sección normal del nervio en el punto C.
φ = arc. tg p, o sea el ángulo que forma la tangente a la directriz con el eje x, en el punto considerado.

De acuerdo con la definición de g:

$$g = B\ \gamma\ \frac{ds}{dx} = \frac{B\ \gamma}{\cos\ \varphi} \qquad \text{(IV-a)}$$

La resultante T tiene una única componente horizontal, cuyo valor es $N_{xy}\ (x\text{-}x_0)$. Por otra parte, esta fuerza debe ser tangente al eje del nervio, dada la coincidencia impuesta entre ese eje y el antifunicular. Por lo tanto:

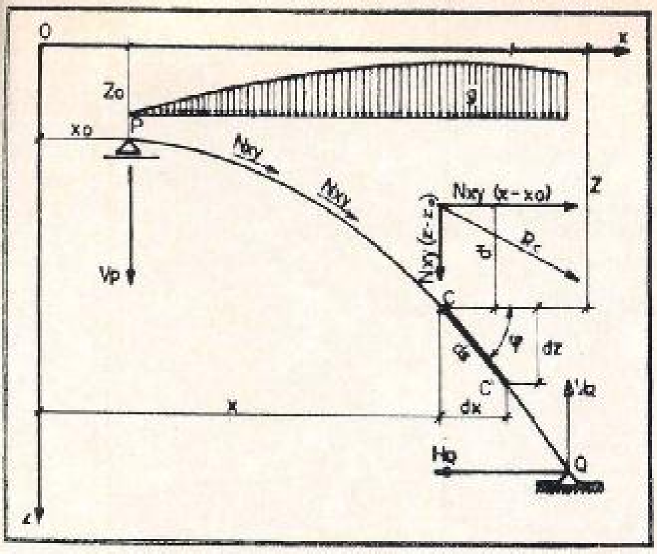

FIG. 5

$$T = \frac{N_{xy}\ (x-x_0)}{\cos \varphi} \qquad \text{(IV-b)}$$

y relacionando (III-g) con las dos expresiones anteriores:

$$\frac{B\ \gamma}{\cos \varphi} = T.\ r \cos \varphi \qquad \text{(IV-c)}$$

de donde

$$\frac{T}{B} = \sigma = \frac{\gamma}{r \cos^2 \gamma} \quad (*) \qquad \text{(IV-d)}$$

que, si llamamos ρ al radio de curvatura de la curva directriz, puede escribirse así:

$$\sigma = \gamma\ \rho \cos \varphi \qquad \text{(IV-e)}$$

Esta ecuación evidencia que la tensión σ depende de la conformación adoptada para la directriz del borde, y en consecuencia puede ser aliviada tanto como se desee operando sobre dicha conformación. El aumento de peso propio del nervio, correlativo con este alivio de las tensiones, no producirá perturbaciones flexionales en la membrana, y en cambio, permitirá reservar un margen de resistencia adecuado para afrontar las solicitaciones accidentales no contempladas en este desarrollo.

V). Paraboloide hiperbólico. Bordes con curvatura impuesta para equilibrar la carga muerta de los nervios.

El paraboloide hiperbólico equilátero y cuyas generatrices y directrices son paralelas a los planos x = O, y = O, responde a la ecuación:

$$z = k_{xy} \qquad \text{(V-a)}$$

Si de esta superficie aislamos un sector de planta cuadrada y de semilado a, obtenemos una figura geométrica que ha sido ampliamente usada como cubierta laminar, casi siempre apoyada en sus puntos más bajos. Si la cáscara es suficientemente rebajada, puede suponerse que:

$$N_{xy} = \text{constante}$$

Si así no fuera, puede recurrirse al procedimiento aludido anteriormente, y que consiste en variar el espesor de lámina de punto a punto.

Los bordes rectos de esta membrana reciben los esfuerzos de resbalamiento, N_{xy} y los conducen a los puntos de apoyo. En consecuencia tales bordes deben engrosarse hasta constituir verdaderos puntales, generalmente de sección creciente hacia los apoyos, así como lo requiere la carga que los solicita. Es justamente el peso de estos puntales el que trataremos de equilibrar, confiriendo a esos bordes una ligera curvatura, de acuerdo con el criterio expuesto.

Para ello, si a la expresión (V-a) le damos la forma:

$$z = j\ (x^2 + y^2) - k_{xy} \qquad \text{(V-b)}$$

con la condición:

$$O > j > \frac{k}{2} \qquad \text{(V-c)}$$

se verifica una deformación de la superficie original que da como resultado un paraboloide hiperbólico oblicuo cuyos cuatro bordes presentan curvatura convexa hacia arriba. Esta curvatura puede regularse mediante la conveniente elección del coeficiente j.

Por vía de ejemplo, aplicaremos los conceptos anteriores adaptando los siguientes valores numéricos: (Fig. 6).

a = 10 metros. $k = 0{,}05\ m^{-2}$. $N_{xy} = 1{,}5$ t/m. De acuerdo con (V-c) fijaremos para j el valor tentativo:

$$j = 0{,}01\ m^{-1}$$

con lo cual, la ecuación (V-b), haciendo abstracción de las unidades, para y = 10 m será:

$$z = 0{,}01\ (x^2 - y^2 + 0{,}05\ xy)$$

$$z = 0{,}01\ (x^2 + 100) + 0{,}05\ x\ .\ 10 = 0{,}01\ (x^2 + 100) + 0{,}5\ x$$

y derivando:

$$p = 0{,}02\ x + 0{,}5; \qquad r = 0{,}02$$

y siendo $x_0 = -10$ m, de acuerdo con (III-g) el peso de la nervadura deberá ser:

$$g = N_{xy}\ (x-x_0)\ r = 1{,}5.\ (x + 10).\ 0{,}02 = 0{,}03.\ (x + 10)\ t/m$$

En el cuadro siguiente se resumen los resultados hallados, in-

(*) No se considera la colaboración de la armadura, cuyo dimensionamiento quedará subordinado al ulterior cálculo a flexión compuesta.

x	y	z	p	r	cos φ	g	B	Dimensiones ancho	Dimensiones altura	σ
M	M	M	-	M^{-1}	-	T/M	cm^2	cm	cm	Kg/cm^2
-10	10	-3	0,3	0,02	0,95	0	0	0	0	13,2
-5	10	-1,25	0,4	0,02	0,93	0,15	581	15	38,7	13,9
0	10	1	0,5	0,02	0,89	0,30	1112	18	61,7	15,1
5	10	3,75	0,6	0,02	0,86	0,45	1611	18	89,5	16,2
10	10	7	0,7	0,02	0,82	0,60	2050	18	114	17,8

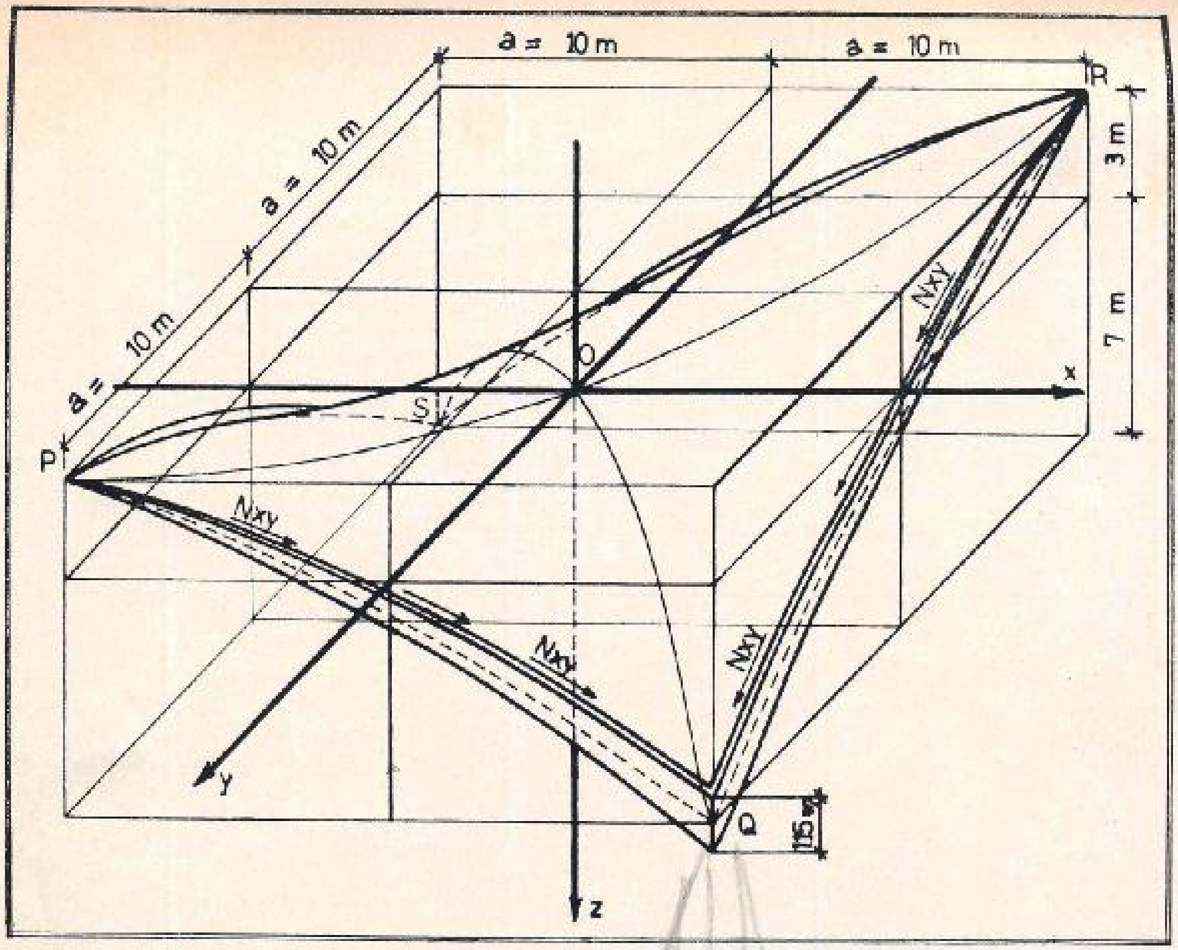

FIG. 6

cluyendo el valor de B, sección normal deducida de la expresión (IV-a), y el de la tensión σ con ayuda de la fórmula (IV-d).
Según se puede observar en el cuadro anterior, los valores de la sección B que se obtienen en las proximidades del punto P, son insuficientes para rigidizar de manera adecuada esa área crítica de la cáscara. Convendrá consecuentemente adoptar en ese entorno escuadrías más robustas, aunque ello implique la aparición de momentos flectores a lo largo del borde PQ, en general de valor reducido frente a la rigidez que es dable obtener en las secciones más comprometidas.

VI) CONCLUSION

Este procedimiento ofrece posibilidades para abordar otros supuestos, siempre en procura de eliminar los momentos flectores ocasionados por el peso propio de las nervaduras portantes.

Por ejemplo, es obvio que N_{xy} = constante no es condición necesaria, pues en caso de no cumplirse podrá existir una función g = g (x) que igualmente anule los momentos flectores. Aún puede suponerse que N_{xy} es la suma o superposición de dos estados tensionales tales que:

$$Nxy = Nxy_1 + Nxy_2$$

el primero de los cuales, compuesto con g, arroje por resultado una solicitación axil pura en el nervio de borde, a su vez dimensionado para resistir por flexión Nxy_2.